Extremale Graphentheorie – Übungsblatt 6
Wintersemester 2019/20
Dr. Christian Reiher, Bjarne Schülke

29. Es seien H ein Graph mit Eckenmenge $[n]$ und M ein Matching in H, d.h. ein Teilgraph von H mit $\Delta(M) \leqslant 1$. Weiterhin sei G ein n-partiter Graph mit Eckenklassen $V_1, \dots, V_n$. Für $ij \in E(M)$ habe $G[V_i, V_j]$ die Dichte d_{ij}, d.h. es gelte $e(V_i, V_j) = d_{ij}|V_i||V_j|$. Für $ij \in E(H) \smallsetminus E(M)$ sei $G[V_i, V_j]$ ein (ε, d_{ij})-quasizufälliger bipartiter Graph. Wie immer sei dabei $\varepsilon > 0$ und $d_{ij} \in [0,1]$ für alle $ij \in E(H)$.

    Man beweise, dass

$$\mathrm{Hom}^{\times}(H,G) = \Big(\prod_{ij \in E(H)} d_{ij} \pm |e(H) - e(M)|\varepsilon\Big) \prod_{i=1}^{n} |V_i|\,.$$

30. Für $\varrho > 0$ und $d \in [0,1]$ sagt man von einem Graphen G auf n Ecken, er sei (ϱ, d)-*dicht*, wenn für alle $X \subseteq V(G)$ die Ungleichung $e(X) \geqslant d|X|^2/2 - \varrho n^2$ gilt.

    Es seien nun $d \in (0,1]$ und $r \in \mathbb{N}$ gegeben. Man beweise, dass es $\varrho > 0$ derart gibt, dass jeder (ϱ, d)-dichte Graph auf n Ecken mindestens ϱn^r Cliquen der Ordnung r enthält.

31. Man führe einen alternativen Beweis von Satz 3.4, der damit beginnt, G zu regularisieren und dann Satz 3.1 auf den „reduzierten Graphen“ anwendet.

32. Es sei $d > 0$ gegeben. Man beweise, dass ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Jeder (ε, d)-quasizufällige bipartite Graph G, dessen Eckenklassen gleich groß sind und der $\delta(G) \geqslant d|V(G)|$ erfüllt, enthält ein perfektes Matching.

33. Es seien $d > 0$ und $\alpha < 1$ gegeben. Man beweise, dass es ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist G ein (ε, d)-quasizufälliger bipartiter Graph mit Eckenklassen A und B, wobei $|A| = |B| = n \geqslant n_0$, so gibt es $\alpha n/2$ paarweise eckendisjunkte Kreise der Länge 4 in G.

34. Ein 3-uniformer Hypergraph H heißt *linear*, wenn je zwei Ecken von H in höchstens einem gemeinsamen Tripel von H vorkommen. Ein tripartiter 3-uniformer Hypergraph G mit Eckenklassen A, B und C heißt *schwach* (ε, d)-*quasizufällig*, wenn

$$\big|e_{\therefore}(X,Y,Z) - d|X||Y||Z|\big| \leqslant \varepsilon|A||B||C|$$

    für alle Teilmengen $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ und $Z \subseteq C$ gilt, wobei $e_{\therefore}(X,Y,Z)$ die Anzahl aller Tripel $\{x,y,z\} \in E(G)$ mit $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$ vorstellt. Man formuliere und beweise eine Version des Zähllemmas für 3-uniforme Hypergraphen, in der H linear sein muss und die tripartiten Teile von G schwach quasizufällig sind.

- Abgabe von Aufgabe 30 (schriftlich, keine Gruppenarbeit) am Donnerstag den 16. Januar vor der Vorlesung
- Eintragung zu den Aufgabe 29, 31–34 bis Freitag den 17. Januar, 12:00 Uhr unter https://is.gd/7arJ0y
- Diskussion am Freitag, den 17. Januar, 12:15 Uhr, Geom 432

Hinweise

29. Wie immer argumentiert man mit vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kanten. Entfernt man im Induktionsschritt lieber eine Kante aus M oder eine andere Kante?
30. Induktion nach r. Wie würde man das für $r = 3$ beweisen?
31. Die Bedingung $K_r(t) \nsubseteq G$ kann man mit Hilfe des Zähllemmas ins Spiel bringen.
32. Heiraten!
33. Was passiert, wenn man die Kreise gedankenlos der Reihe nach wählt?
34. Der Beweis geht genauso wie bei Graphen. Wo geht die Linearität von H ein?